

V. Koordinátageometria

Szakaszt adott arányban osztó pont, súlypont koordinátái

V

3462. a) $x_f = \frac{6+12}{2} = 9$, $y_f = \frac{6+2}{2} = 4$, $F(9; 4)$; b) $\left(7; \frac{11}{2}\right)$; c) $\left(-\frac{23}{12}; \frac{73}{24}\right)$;

d) $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; e) $\left(\frac{a}{2}; \frac{c}{2}\right)$.

3463. $\frac{b_1-4}{2} = -1 \Rightarrow b_1 = 2$, $\frac{b_2+6}{2} = -1 \Rightarrow b_2 = -8$, $B(2; -8)$.

3464. $A_1\left(2; \frac{7}{2}\right)$, $B_1\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}\right)$, $C_1\left(\frac{3}{2}; 4\right)$. $\vec{BA}(1; 6)$ $\vec{A_1B_1}\left(\frac{1}{2}; 3\right) \Rightarrow \vec{BA} = 2 \cdot \vec{A_1B_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{BA} \parallel \vec{A_1B_1}$. Hasonlóan $\vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{C_1B_1}$, $\vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{C_1A_1}$.

3465. a)
$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1+b_1}{2} = 2 \\ \frac{b_1+c_1}{2} = -2 \\ \frac{c_1+a_1}{2} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_1+b_1 = 4 \\ b_1+c_1 = -4 \\ c_1+a_1 = 8 \\ a_1+b_1+c_1 = 4 \end{array} \right\} + ; \left. \begin{array}{l} \frac{a_2+b_2}{2} = 3 \\ \frac{b_2+c_2}{2} = 1 \\ \frac{c_2+a_2}{2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 5, \\ b_2 = 1, \\ c_2 = 1. \end{array}$$

Innen: $a_1 = 8$, $b_1 = -4$, $c_1 = 0$. $A(8; 5)$, $B(-4; 1)$, $C(0; 1)$.

b) $(-1; 6)$, $(7; 12)$, $(3; -2)$.

3466. $O_1(10; 10)$. Ha $O_2(x_2; y_2)$, akkor $\frac{x_2+0}{2} = 1$, $\frac{y_2+0}{2} = 7 \Rightarrow O_2(2; 14)$,

$b_1 = \frac{10+2}{2} = 6$, $b_2 = \frac{10+14}{2} = 12 \Rightarrow B(6; 12)$. OB felezőpontja: $F_1(3; 6)$, AC felezőpontja

$F_2(3; 6)$. $\vec{OB}(6; 12)$, $\vec{AC}(4; -2)$, $\vec{OB} \cdot \vec{AC} = 0$. Az átlók merőlegesen felezik egymást.

3467. $M(4; 3)$ $\vec{OK}(7; 0)$, $+90^\circ$ -kal elforgatva $\vec{OK}_1(0; 7)$. $\vec{OL}(3; -2)$, -90° -kal elforgatva

$\vec{OL}_1(-2; -3)$. $\vec{K_1L_1}(-2; -10)$, $\vec{OM}(5; -1)$, $\vec{OM} \cdot \vec{K_1L_1} = 0 \Rightarrow \vec{OM} \perp \vec{K_1L_1}$.

$|\vec{OM}| = \sqrt{26}$, $|\vec{K_1L_1}| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$, így $K_1L_1 = 2 \cdot OM$.

3468. $A_1\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $AA_1\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $BB_1\left(-6; -\frac{15}{2}\right)$, $CC_1\left(\frac{3}{2}; 9\right)$.

3469. P -n túl meghosszabbítva $P_1(-6; 4)$, O -n túl meghosszabbítva $P_2(3; -2)$. Ha $P(a; b)$, akkor $P_1(2a; 2b)$, $P_2(-a; -b)$.

3470. $B_1(6; 12)$, $C_1(16; -4)$.

3471. a) $AP : PB = 2 : 5 \Rightarrow p_1 = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 10}{7} = 5$, $p_2 = \frac{5(-2) + 2 \cdot 12}{7} = 2. \Rightarrow P(5; 2)$.

$AQ : QB = 5 : 2 \Rightarrow Q(8; 8)$. b) $\left(\frac{32}{7}; \frac{9}{7}\right), \left(\frac{31}{7}; \frac{12}{7}\right)$.

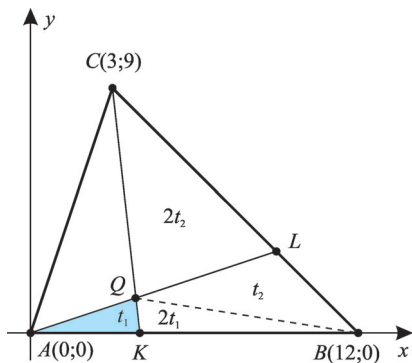
3472. a) $(3; 2)$, $(4; 6)$, $(5; 10)$; b) $\left(\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right), \left(\frac{17}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

3473. $\vec{AB}(2; -4)$, $\vec{AB}_1 = \frac{3}{2} \cdot \vec{AB}(3; -6)$, $\vec{OB}_1 = \vec{OA} + \vec{AB}_1$, $\vec{OB}_1(7; -3)$, $B_1(7; -3)$.

Hasonlóan: $A_1(3; 5)$.

3474. $F_1(2; 4)$, $F_2\left(\frac{11}{2}; 0\right)$, $F_1F_2\left(\frac{7}{2}; -4\right)$.

3475.



3475. Egyenlő magasságú háromszögek területének aránya megegyezik a közös magassághoz tartozó oldalak arányával. Az ABC háromszög területe legyen t .

$$t_{ABL} = \frac{1}{3}t, t_{BCK} = \frac{2}{3}t.$$

$$\left. \begin{aligned} 3t_1 + t_2 &= \frac{t}{3} \\ 2t_1 + 3t_2 &= \frac{2t}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 = \frac{t}{21}, t_2 = \frac{4t}{21}, t_{ABQ} = 3t_1 = \frac{t}{7},$$

$$t_{KBQ} = \frac{2t}{21}, AQ : QL = t_{ABQ} : t_{BLQ} = \frac{t}{7} : \frac{4t}{21} = 3 : 4,$$

$$CQ : QK = t_{BCQ} : t_{KBQ} = \frac{4t}{7} : \frac{2t}{21} = 12 : 2 = 6 : 1.$$

3476. Legyen az OAB háromszög területe t .

$$t_{AEO} = \frac{1}{3}t, t_{ABD} = \frac{1}{3}t.$$

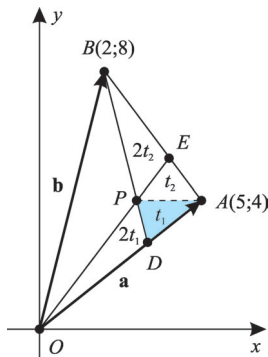
$$\left. \begin{aligned} 3t_1 + t_2 &= \frac{t}{3} \\ t_1 + 3t_2 &= \frac{t}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{t}{12}. t_{OAP} : t_{AEP} =$$

$$= 3t_1 : t_1 = 3 : 1. t_{ABQ} = \frac{2t}{12}, OP : PE = 3 : 1,$$

$$\vec{OP} = \frac{3}{4}\vec{OE}. \vec{OE} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{3}, \vec{OP} = \frac{2\mathbf{a} + \mathbf{b}}{4},$$

$$\vec{OP}(3; 4), |\vec{OP}| = 5.$$

3476.



3477. a) $S(4; 2)$; b) $S\left(\frac{4}{3}; 0\right)$; c) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; d) $\left(\frac{11a+b}{18}; \frac{11a-b}{18}\right)$.

3478. $S_{ABC}(1; 2)$, $S_{DEF}(7; 7)$, $S_1S_2(6; 5)$. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}(18; 15)$, $3S_1S_2(18; 15)$.

$$s_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}, s_2 = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f}}{3}, S_1S_2 = s_2 - s_1. 3S_1S_2 = \mathbf{d} + \mathbf{e} + \mathbf{f} - (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \mathbf{d} - \mathbf{a} + \mathbf{e} - \mathbf{b} + \mathbf{f} - \mathbf{c}.$$

3479. Az ABC háromszög súlypontja $S_1\left(\frac{14}{3}; 5; 0\right) \Rightarrow S\left(5; \frac{19}{4}; 4\right)$. A BCD háromszög súly-

pontja $S_2\left(\frac{19}{3}; \frac{16}{3}; \frac{16}{3}\right) \Rightarrow S'\left(5; \frac{19}{4}; 4\right)$; $S = S'$.

$$\text{Általánosán: } s_1 = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}, s = \frac{3s_1 + \mathbf{d}}{4} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}}{4}.$$

3480. $C(5; -15)$.

3481. $H_1(4; 0)$, $H_1(8; 0)$, $K_1(11; 2)$, $K_2(10; 4)$, $L_1(5; 8)$, $L_2(7; 7)$, $M_1(1; 3)$, $M_2(2; 6)$.

M_1K_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{23}{3}; \frac{7}{3}\right)$; M_2K_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{14}{3}; \frac{16}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3}; \frac{14}{3}\right)$;

H_1L_1 harmadolópontjai: $\left(\frac{13}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $\left(\frac{14}{3}; \frac{16}{3}\right)$; H_2L_2 harmadolópontjai: $\left(\frac{23}{3}; \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{22}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

3482. $\vec{AD}(1; 3)$, $\vec{BC}(1; 3) \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow ABCD$ paralelogramma. $H\left(\frac{26}{3}; 2\right)$. $EF \parallel BC$,

EG az ABH háromszög középvonala, ezért $EG = \frac{1}{2}BH = \frac{BC}{3}$, így $FG = \frac{2}{3}BC \Rightarrow BHFG$ pa-

ralelogramma, ezért M a BF és GH felezőpontja. Ebből következik, hogy M az AH negyedelő-

pontja. $M\left(\frac{13}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

3483. a) $\vec{AB}(3; 4)$, $\vec{DC}(3; 4) \Rightarrow AB \parallel DC$; b) $\vec{AB} = \vec{DC}\left(\frac{1}{2}; 4\right)$; c) $\vec{AB} = \vec{DC}(-6; -1)$.

3484. a) Az $APQR$ paralelogramma átlói felezi egymást. $A(-2; 2)$, $B(2; -2)$, $C(4; 4)$.

b) $(5; -5)$, $(7; -3)$, $(3; 9)$; c) $(8; 3)$, $(4; 7)$, $(-2; 1)$.

3485. $C(-7; 15)$, $D(2; 9)$.

3486. A rombusz középpontja $K(1; 9)$, $\vec{KD}(4; 2)$. \vec{KA} a \vec{KD} $+90^\circ$ -os elforgatottjának kétsze-

rese: $\vec{KA}(-4; 8)$. $\vec{OA} = \vec{OK} + \vec{KA}$, $\vec{OA}(-3; 17)$.

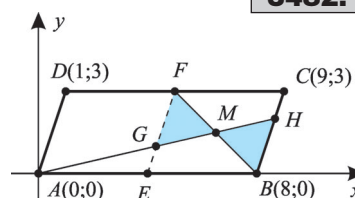
$A(-3; 17)$, $C(5; 1)$.

3487. $K(1; 0)$, $\frac{1}{2}\vec{KA}(5; 4)$, $+90^\circ$ -kal elforgatva

$\vec{KB}(-4; 5)$, $B(-3; 5)$, $D(5; -5)$.

3488. $|AB| = 5$, $|AC| = 10$, $|BC| = 5\sqrt{5}$. Az f_α mes-

se a BC oldalt P -ben, f_β az AC oldalt Q -ban, f_γ az AB oldalt R -ben.



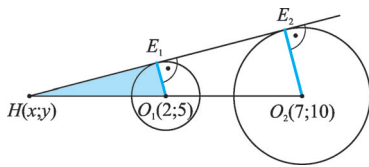
$$BP : PC = 5 : 10 = 1 : 2 \Rightarrow P\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right), \quad AQ : QC = 5 : 5\sqrt{5} = 1 : \sqrt{5}.$$

$$Q = \left(6 - 2\sqrt{5}; \frac{3\sqrt{5} - 1}{2}\right), \quad AR : RB = 10 : 5\sqrt{5} = 2 : \sqrt{5}, \quad R(6\sqrt{5} - 8; 8\sqrt{5} - 15).$$

3489. Legyen $P(p; 0)$ és $AB : BP = m : n = \lambda$, $\frac{1 \cdot 6 + \lambda \cdot 0}{1 + \lambda} = 1 \Rightarrow \lambda = 5$, tehát $AB : BP = 5 : 1$,
 $\frac{5p + 2}{6} = 8 \Rightarrow p = \frac{46}{5}$. $P\left(\frac{46}{5}; 0\right)$. Hasonlóan: $R\left(0; \frac{23}{3}\right)$.

3490. $|AB| = 10$. A magasság talppontja T . A befogótétel szerint $AO^2 = AT \cdot AB$. $6^2 = 10 \cdot AT$,
 $AT = \frac{18}{5}$, $BT = \frac{32}{5}$, $AT : BT = \frac{18}{5} : \frac{32}{5} = 9 : 16$, $T = \left(\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right)$.

3491.



3491. $E_1HO_1\Delta \sim E_2HO_2\Delta$,

$$\overrightarrow{HO_1} : \overrightarrow{HO_2} = 3 : 7 \Rightarrow 7 \cdot \overrightarrow{HO_1} = 3 \cdot \overrightarrow{HO_2},$$

$$\overrightarrow{HO_1}(2 - x; 5 - y), \quad \overrightarrow{HO_2}(7 - x; 10 - y).$$

$$7(2 - x) = 3(7 - x) \Rightarrow x = \frac{7}{4},$$

$$7(5 - y) = 3(10 - y) \Rightarrow y = \frac{5}{4}, \quad H\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

3492. AB, BC, CD, DA felezőpontjai rendre: $F_1\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $F_2\left(\frac{13}{2}; \frac{15}{2}\right)$, $F_3\left(\frac{5}{2}; 16\right)$, $F_4(-2; 9)$,

F_1F_3 , illetve F_2F_4 felezőpontjai: $K\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$, $L\left(\frac{9}{4}; \frac{33}{4}\right)$. $F_1F_2F_3F_4$ paralelogramma.

3493. Legyen az S súlypont az origó, a súlyponton átmenő egyenes az x tengely. $S(0; 0)$,
 $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$. A feltétel szerint $a_2 + b_2 + c_2 = 0$.

Ebből $a_2 + b_2 = -c_2$, $|a_2 + b_2| = |-c_2|$.

3494. Az ABC háromszög AB oldalát a B csúcs felé hosszabbítjuk meg, és így tovább. A csúcs-
 pontokhoz vezető vektorok $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{a} - \mathbf{c}$, legyen $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
 A keletkezett háromszög csúcsaihoz vezető vektorok $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB}_1 &= \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}); & \mathbf{b}_1 &= \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ \overrightarrow{BC}_1 &= \lambda \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}); & \mathbf{c}_1 &= \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \\ \overrightarrow{CA}_1 &= \lambda \cdot \overrightarrow{CA} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}); & \mathbf{a}_1 &= \mathbf{c} + \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \end{aligned} \right\} +$$

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}; \quad \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 + \mathbf{c}_1}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} \Rightarrow \mathbf{s}_1 = \mathbf{s} \Rightarrow S = S_1.$$

3495. Az olyan háromszögeket kell megkeresni, amelyeknél a súlypont koordinátái kü-
 lönböző eseteket jelölnek az origótól való távolságot tekintve. $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; -1)$,

$S(0; 0)$, $|OS| = 0$; $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$, $S\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $|OS| = \frac{1}{3}$; $A(-1; -1)$,

$$B(0; 1), C(1; 0), S\left(0; \frac{2}{3}\right), |OS| = \frac{2}{3}; \quad A(0; 0), B(0; 1), C(1; 0), S\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), |OS| = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$A(0; 0), B(0; 1), C(1; 1), S\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), |OS| = \frac{\sqrt{5}}{3}; \quad A(1; 0), B(1; 1), C(0; 1), S\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right),$$

$|OS| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ha S koordinátáinak előjelét változtatjuk, a távolság változatlan marad, így értéke a felsorolt 6 lehetőség valamelyike lehet.

$$\mathbf{3496.} \quad \vec{AB}(5; 2), \vec{CD}(15; 6),$$

$$3 \cdot \vec{AB} = \vec{CD} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{CD}. \quad H_1B : H_1D = AB : CD = 1 : 3,$$

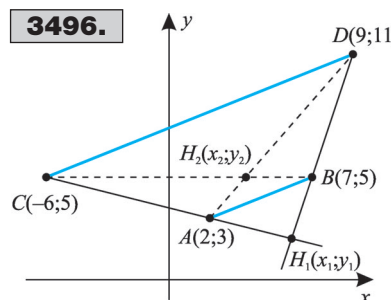
$$3\vec{H_1B} = \vec{H_1D}. \quad \vec{H_1B}(7 - x_1; 5 - y_1),$$

$$\vec{H_1D}(9 - x_1; 11 - y_1), \quad H_1(6; 2).$$

$$ABH_2\Delta \sim CDH_2\Delta, \quad AH_2 : H_2D = AB : CD = 1 : 3.$$

$$3\vec{AH_2} = \vec{H_2D}, \quad \vec{AH_2}(x_2 - 2; y_2 - 3),$$

$$\vec{H_2D}(9 - x_2; 11 - y_2) \Rightarrow H_2\left(\frac{15}{4}; 5\right).$$



3496.

V

$$\mathbf{3497.} \quad \vec{AB}(3; -1), \quad 3 \cdot \vec{AB}(9; -3) + 90^\circ\text{-os elforgatottja } \vec{AD}_1(3; 9), \quad \vec{BC}_1(3; 9), \quad \mathbf{d}_1 = \mathbf{a} + \vec{AD}_1,$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \vec{BC}_1 \Rightarrow D_1\left(\frac{9}{2}; 10\right), \quad C_1\left(\frac{15}{2}; 9\right), \quad 3 \cdot \vec{AB} - 90^\circ\text{-os elforgatottja: } \vec{AD}_2 = \vec{BC}_2(-3; -9), \text{ in-}$$

$$\text{nen } D_2\left(-\frac{3}{2}; -8\right), \quad C_2\left(\frac{3}{2}; -9\right), \quad K_1\left(\frac{9}{2}; 5\right), \quad K_2\left(\frac{3}{2}; -4\right).$$

Megoldható a feladat úgy is, ha $BC = \frac{AB}{3}$.

Két pont távolsága

$$\mathbf{3498.} \quad |OP_1| = 5, \quad |OP_2| = 5, \quad |OP_3| = 13, \quad |OP_4| = \sqrt{58}, \quad |OP_5| = 3,$$

$$|OP_6| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad |OP_7| = 3, \quad |OP_8| = \sqrt{2a^2} = |a| \cdot \sqrt{2}, \quad |OP_9| = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

$$\mathbf{3499.} \quad |\mathbf{a}| = 5; \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{29}; \quad |\mathbf{c}| = \sqrt{109}; \quad |\mathbf{d}| = \sqrt{85}.$$

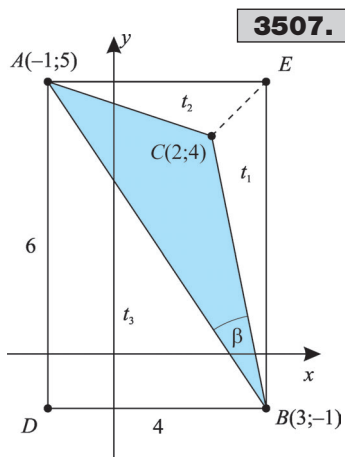
$$\mathbf{3500.} \quad a) d = 5; \quad b) d = \sqrt{65}; \quad c) \sqrt{65}; \quad d) \sqrt{53}; \quad e) \sqrt{74}; \quad f) \sqrt{\frac{370}{4}}; \quad g) 1;$$

$$h) \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\mathbf{3501.} \quad a) c = 5, \quad b = 10, \quad a = 5\sqrt{5}, \quad k = 5 + 10 + 5\sqrt{5} = 15 + 5\sqrt{5} = 5(3 + \sqrt{5});$$

$$b) 10\sqrt{2} + 13 + \sqrt{29}; \quad c) 4\sqrt{5} + 12 + 4\sqrt{2}; \quad d) |a| + 2|b| + \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

V

**3507.**

3502. a) $|CA| = |CB| = \sqrt{10}$, $|AB| = 4\sqrt{2}$, $F_{AB}(5; 0)$,
 $m_c = \sqrt{2}$, $t = \frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 4$ területegység.

b) 6 területegység.

3503. $C(c; 0)$, $\sqrt{(c-2)^2 + 1} = \sqrt{(c-6)^2 + 25} \Rightarrow c = 7$,
 $C(7; 0)$, $|AB| = 4\sqrt{2}$, $F_{AB}(4; 3)$, $m_c = 3\sqrt{2}$, $t = 12$ területegység.

3504. a) $\vec{CA}(2; -6)$, $\vec{CB}(9; 3)$, $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$,

$|AB| = \sqrt{130}$, $r = \frac{AB}{2}$, $t = \frac{65\pi}{2}$ területegység.

b) $t = \frac{629\pi}{4}$ területegység.

3505. AB felezőpontja: $K(-1; 2)$, $\vec{KA}(3; -1) + 90^\circ$ -os elforgatottja $\vec{KC}_1(1; 3) \Rightarrow C_1(0; 5)$, $\vec{KB}(3; -1) + 90^\circ$ -os elforgatottja $(-1; -3)$, $C_2(-2; -1)$.

3506. Legyen $A(12; 0)$, $B(0; 5)$, $K_{AB}\left(6; \frac{5}{2}\right)$, $S\left(4; \frac{5}{3}\right)$, $|SK| = \sqrt{4 + \frac{25}{36}} = \frac{13}{6}$.

3507. $t_{ADBE} = 6 \cdot 4 = 24$, $t_1 = \frac{6 \cdot 1}{2} = 3$, $t_2 = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$, $t_3 = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

$T_{ABC} = 24 - (12 + 3 + 2) = 7$ területegység. $\vec{CA}(-3; 1)$, $|\vec{CA}| = \sqrt{10}$, $\vec{CB}(1; -5)$, $|\vec{CB}| = \sqrt{26}$,
 $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -8 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos \gamma \Rightarrow \gamma = 119,7^\circ$, $\beta = 22,3^\circ$, $\alpha = 38^\circ$.

3508. a) $T = 159$ területegység.

$k = \sqrt{305} + \sqrt{386} + \sqrt{26} + \sqrt{157} \approx 57,74$ egység.

b) $2\sqrt{2}$ területegység.

3509. a) $\vec{AD}(3; 1)$, $\vec{BC}(3; 1) \Rightarrow AD \parallel BC$, $\vec{AB}(1; -2)$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1 \neq 0$, tehát paralelogramma. b) $\vec{AB}(5; 0)$, $\vec{DC}(3; 0) \Rightarrow AB \parallel DC$, $|AD| = |BC| = \sqrt{10}$, tehát szimmetrikus trapéz.

c) $\vec{AC}(-2; -4)$, $\vec{BD}(4; -2)$, $|AC| = |BD| = 2\sqrt{5}$, $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, tehát négyzet. d) Négyzet.

e) Négyzet.

3510. $C(x; y)$, $|AB| = 5$, $|AC| = |BC| = 5$, $|AC|^2 = |BC|^2 = 25$,

$$\left. \begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 \\ (x-8)^2 + y^2 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 \left(\frac{12 + 3\sqrt{3}}{2}; \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2} \right), C_2 \left(\frac{12 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{3 - 4\sqrt{3}}{2} \right).$$

3511. Mivel a kör érinti az x tengelyt, $r = 13$. Ha $P(x; y)$ rajta van a körön,
 $x^2 + (y + 13)^2 = 169$, $P_1(11; -6)$ $11^2 + (-6 + 13)^2 = 121 + 49 \neq 169$, ezért P_1 nem illeszkedik a körre. P_2 illeszkedik a körre.

3512. a) $CP^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, $r^2 = CP^2 + 3^2 = 34$, $r = \sqrt{34}$; b) $r = 3\sqrt{3}$.

3513. a) $P(x; y)$, $AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2$, $(x-4)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y-3)^2$, $7x - y = 1$;
 b) $x + 7y = 7$.

3514. A szabályos hatszög középpontja és két szomszédos csúcsa

szabályos háromszöget alkot. $\vec{AB}(3; 3\sqrt{3})$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$,

$AB = 6$. Ezért $K_1(2 + 6; 0)$, $K_1(8; 0)$, $K_2(5 - 6; 3\sqrt{3})$,

$K_2(-1; 3\sqrt{3})$. A további csúcsok: $(11; 3\sqrt{3})$, $(14; 0)$, $(11; -3\sqrt{3})$,
 $(5; -3\sqrt{3})$, illetve $(2; 6\sqrt{3})$, $(-4; 6\sqrt{3})$, $(-7; 3\sqrt{3})$, $(-4; 0)$.

3515. $PO = PA \Rightarrow PO^2 = PA^2$, $P(x; 0)$, $x^2 = (x - 9)^2 + 3^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 5$, $P(5; 0)$.

3516. $P(x; 0)$, $AP = BP \Rightarrow AP^2 = BP^2$,

$(x - 2)^2 + 1^2 = (x - 6)^2 + 5^2 \Rightarrow x = 7$, $P(7; 0)$.

3517. $Q(0; y)$, $PQ = 15 \Rightarrow 5^2 + (y + 9)^2 = 225 \Rightarrow Q_1(0; -9 + 10\sqrt{2})$, $Q_2(0; -9 - 10\sqrt{2})$.

3518. Az érintés miatt a kör középpontja $K(2; r)$, ha a sugara r . Ekkor $KA = r$,
 $(2 + 4)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r = 10$, $K(2; 10)$.

3519. Mivel $P(4; 2)$ az első negyedben van, a kör középpontja $K(r; r)$. $PK = r$,
 $(r - 4)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r_1 = 10$, $r_2 = 2$, $K_1(10; 10)$, $K(2; 2)$.

3520. Legyen $P(x; y)$, olyan pont, amelyre $AP \perp BP$. $\vec{AP}(x + 4; y - 2)$, $\vec{BP}(x - 8; y + 6)$,
 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = (x + 4)(x - 8) + (y - 2)(y + 6) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$. Ha $y = 0$, akkor
 $P_1(2 + 4\sqrt{3}; 0)$, $P_2(2 - 4\sqrt{3}; 0)$. Ha $x = 0$, akkor $Q_1(0; -2 + 4\sqrt{3})$, $Q_2(0; -2 - 4\sqrt{3})$.

3521. $P(x; 0)$ $AP \perp BP$. $\vec{AP}(x + 1; -3)$, $\vec{BP}(x - 7; -3)$, $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = (x + 1)(x - 7) + 9 = 0$.
 $P_1(3 + \sqrt{7}; 0)$, $P_2(3 - \sqrt{7}; 0)$.

3522. $P(x; 0)$, $\vec{PA}(x - 6; -a)$, $\vec{PB}(x + 2; -1)$, $\vec{PA} \perp \vec{PB}$. $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (x - 6)(x + 2) + a = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + a - 12 = 0$. Egy megoldás van, ha a diszkrimináns 0.
 $D = 16 - 4(a - 12) = 0$, $a = 16$. $A(6; 16)$, $P(2; 0)$.

3523. $B(0; y)$, $\vec{AB} \perp \vec{CB} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CB} = 0$. $\vec{AB}(6; y)$, $\vec{CB}(-1; y + 1)$, $-6 + y(y + 1) = 0$.
 $B_1(0; 2)$, $B_2(0; -3)$. A középpontos szimmetriát felhasználva $D_1(-5; -3)$, $D_2(-5; 2)$.

3524. $B(0; y)$, $\vec{AB}(-2; y + 2)$, $\vec{CB}(-4; y - 6)$. $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 8 + (y + 2)(y - 6) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow B_1(0; 2 + 2\sqrt{2})$, $B_2(0; 2 - 2\sqrt{2})$. $D_1(6; 2 - 2\sqrt{2})$, $D_2(6; 2 + 2\sqrt{2})$.

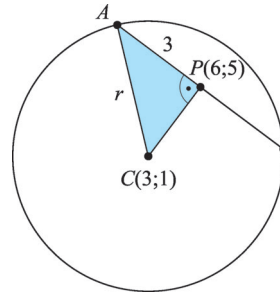
$|AB_1| = 2\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}$, $|B_1C| = 2\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$,

$T_1 = 4\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}(10 - 4\sqrt{2}) = 4\sqrt{(6 + \sqrt{2})^2} = 4(6 + \sqrt{2})$,

$|AB_2| = 2\sqrt{7 - 4\sqrt{2}}$, $|B_2C| = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$, $T_2 = 4(6 - \sqrt{2})$.

3525. 4 megoldás van, aszerint, hogy az AB oldal a hosszabb, vagy a rövidebb. Ha $BC =$
 $= \frac{1}{3}AB$, $\vec{AB}(9; 12)$, $\vec{BC}_1(-4; 3)$, $\vec{BC}_2(4; -3)$; $\mathbf{c}_1 = \mathbf{b} + \vec{BC}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{b} + \vec{BC}_2$; $C_1(3; 19)$,

3512.



V

$C_2(11; 13)$. K az AC felezőpontja: $K_1\left(\frac{1}{2}; \frac{23}{2}\right)$, $K_2\left(\frac{9}{2}; \frac{17}{2}\right)$. Ha $\vec{BC} = 3 \cdot \vec{AB}$, $\vec{BC}_3(-36; 27)$,
 $C_3(-29; 43)$, $\vec{BC}_4(36; -27)$, $C_4(43; -11)$. Így $K_3\left(-\frac{31}{2}; \frac{47}{2}\right)$, $K_4\left(\frac{41}{2}; -\frac{7}{2}\right)$.

3526. $|AB| = \sqrt{10}$, $|BC| = 5$. Legyen $D(x; y)$.

$$\left. \begin{aligned} AD = AB \Rightarrow AD^2 = AB^2 \Rightarrow (x-8)^2 + (y-5)^2 = 10 \\ CD = BC \Rightarrow CD^2 = BC^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(7; 2).$$

$AC = \sqrt{45}$, $BD = \sqrt{20}$, $T = 15$ területegység.

3527. $\vec{AC}(9; 9)$, $|AC| = 9\sqrt{2}$, $T = 27 = \frac{9\sqrt{2} \cdot BD}{2} \Rightarrow BD = 3\sqrt{2}$.

Az AC felezőpontja $F\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. \vec{FD} , illetve \vec{FB} az $\frac{1}{3}\vec{FD}$, 90° -os elforgatottja.

$$\vec{FC}\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right), \vec{FD}\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right), \vec{FB}\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{f} + \vec{FD} \Rightarrow D(-1; 1)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{f} + \vec{FB} \Rightarrow B(2; -2).$$

3528. A rombusz átlói felezik a rombusz szögeit, tehát az ABC háromszög szabályos. $B(x; y)$,

$$\left. \begin{aligned} AC = \sqrt{20}, AD = BC = \sqrt{20} \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(1 + 2\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}),$$

$$D(1 - 2\sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}).$$

3529. $(\mathbf{a}, \mathbf{j}) = (\mathbf{b}, \mathbf{j}) = \varphi$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{5}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{4 + b^2}$, $\mathbf{j}(0; 1)$. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = 2\sqrt{5} \cdot 1 \cdot \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{j} = \sqrt{4 + b^2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = b \Rightarrow 5b^2 = 4 + b^2 \Rightarrow b = \pm 1. \text{ Mivel } b > 0, B(-2; 1).$$

3530. $A(x; y)$, $AB = AC = 5 \Rightarrow AB^2 = AC^2 = 25$. $\left. \begin{aligned} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 25 \\ (x-8)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1(4; -1),$

$A_2(3; 2)$. $BC = 3\sqrt{10}$, BC felezőpontja $F\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $m = AF = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $T = 7,5$ területegység.

3531. a) Legyen $K(u; v)$, $AK = BK$, $AK^2 = BK^2$, illetve $AK = CK$, $AK^2 = CK^2$.

$$(u-1)^2 + (v-5)^2 = (u-8)^2 + (v-2)^2, \text{ illetve } (u-1)^2 + (v-5)^2 = (u+6)^2 + (v+2)^2.$$

$$v = -\frac{14}{5}, u = \frac{9}{5}, K\left(\frac{9}{5}; -\frac{14}{5}\right), r = \sqrt{\left(\frac{9}{5} - 1\right)^2 + \left(-\frac{14}{5} - 5\right)^2} = \frac{\sqrt{1537}}{5};$$

$$b) K\left(-\frac{13}{14}; -\frac{9}{14}\right), r = \frac{\sqrt{2210}}{14}; \quad c) K(-3; -2), r = 5; \quad d) K(3; 4), r = 5; \quad e) K\left(-\frac{49}{20}; \frac{1}{5}\right),$$

$$r = \frac{\sqrt{8177}}{20}.$$

3532. Az oldalfelező pontok által meghatározott háromszög hasonló az eredetihez. Köré írt körének sugara fele az eredeti háromszög köré írható körének. $AK = BK$, $AK^2 = BK^2$, illetve $AK = CK$, $AK^2 = CK^2$. $(u + 7)^2 + (v + 2)^2 = (u + 1)^2 + (v - 9)^2$, illetve $(u + 7)^2 + (v + 2)^2 =$

$$= (u - 5)^2 + (v + 3)^2; \quad K \left(-\frac{15}{23}; \frac{77}{46} \right). \quad r^2 = AK^2 \left(7 - \frac{15}{23} \right)^2 + \left(\frac{77}{46} + 2 \right)^2 = \frac{113825}{4 \cdot 23^2}. \quad R \approx 7,33,$$

$$R^2 = 4r^2, \quad T = R^2\pi = 4 \cdot r^2\pi = 675,18 \text{ területegység.}$$

3533. Ilyen háromszög nem létezik.

3534. $P(x; y)$, $PA = PB \Rightarrow PA^2 = PB^2$, illetve $PC : PD = 2 : 3$, $\frac{PC^2}{PD^2} = \frac{4}{9}$.

$$P_1(1; 4), \quad P_2(-6; -3).$$

3535. $S(-1; 7)$, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 261 + 45 + 162 = 468$, $AS^2 + BS^2 + CS^2 = 89 + 50 + 17 = 156$. Mivel $3 \cdot 156 = 468$, ezért az állítás igaz. Az általános megoldáshoz válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy a súlypont az origóba essen.

3536. Legyen az e egyenes az x tengely, $P(x; 0)$, $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$.

$$A PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x - a_1)^2 + a_2^2 + (x - b_1)^2 + b_2^2 + (x - c_1)^2 + c_2^2 =$$

$$= 3 \left(x - \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} \right)^2 - \frac{(a_1 + b_1 + c_1)^2}{3} + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 \text{ kifejezés minimális, ha}$$

$$x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \quad P \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}; 0 \right). \quad P \text{ a súlypontnak az } x \text{ tengelyre eső merőleges vetülete.}$$

3537. Legyen $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$, $P(x; x)$.

$$S = x^2 + y^2 + (x - 1)^2 + y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 4x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + 4 =$$

$$= 4 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 4 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 + 2. \quad 2 \leq S \leq 4, \quad S_{\min} = 2, \text{ ekkor } P \text{ a négyzet középpontjában van,}$$

$$S_{\max} = 4, \text{ ekkor } P \text{ a négyzet csúcaiban van.}$$

Az egyenes egyenletei

3538. a) $4x + 3y = 26$; b) $2x + y + 2 = 0$; c) $-2x + 3y + 8 = 0$;

d) $x + 3y = 0$; e) $y = 5$; f) $x = -40$; g) $x + y = 1$.

3539. a) $3 - 2y = 0$; b) $\sqrt{3}x - 3y = -2\sqrt{3} - 3$; c) $x\sqrt{3} + y = 4\sqrt{3}$; d) $x - y = 5$;

e) $x - y = 5$; f) $x + y = 8$; g) $8x + 20y = 101$; h) $x = 4$.

3540. a) $3x - 5y = 27 - 30 \Rightarrow 3x - 5y = -3$; b) $x - y = -2$; c) $x - 3y = 7$;

d) $5x - 4y = 0$; e) $9x - 14y = -15$; f) $5x + 2y = 6,4$; g) $x = 0$; h) $8x - 3y = -24$;

i) $\mathbf{n}(a - b; b - a)$, $(a - b)x + (b - a)y = 0$, ha $a \neq b$, akkor $x - y = 0$; ha $a = b$, akkor $x = a$,

vagy $y = b$, vagy $n_1x + n_2y = (n_1 + n_2)a$. j) $3\sqrt{2}x + (3\sqrt{2} - \sqrt{3})y = 6 + 2\sqrt{6}$.

3541. $\vec{P_1P_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, $\mathbf{n}(y_2 - y_1; -x_2 + x_1)$, $(y_2 - y_1)x + (-x_2 + x_1)y =$

$$= (y_2 - y_1)x_1 + (-x_2 + x_1)y_1 \text{ rendezve, kiemelve: } (x_2 - y_1)(x - x_1) = (x_2 - x_1)(y - y_1).$$

Ha $x_1 = x_2$ és $y_2 \neq y_1 \Rightarrow x = x_1$; ha $x_1 \neq x_2$ és $y_2 = y_1 \Rightarrow y = y_1$.